XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2020

1. (4 puntos) Para todo entero positivo n, se define a_n como el promedio de todos los divisores positivos de n. Determinar si las siguientes series convergen o divergen:
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, a_n}$

2. (4 puntos) Sean a, b números complejos tales que $|b| > \text{máx}\{1, |a|\}$. Probar que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{b^{m+1} - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{b^{m+1} - a}.$$

3. (5 puntos) Dos elementos de $\mathbb{Z}^2$ se llaman *vecinos* si están a distancia 1. Los elementos de $\mathbb{Z}^2$ se pintan azul (y una vez pintados permanecen pintados) por turnos de la siguiente manera:
   - En el turno 0, se pinta $(0, 0)$.
   - En el turno $n > 0$ se pintan todos aquellos puntos que no han sido pintados, y tienen exactamente un vecino pintado tras el turno $n - 1$.

   Determinar todos los elementos de $\mathbb{Z}^2$ que no serán pintados tras una cantidad finita de turnos.

4. (5 puntos) Determinar si existen números complejos $z_1, z_2, ..., z_{2020}$, todos con parte imaginaria (estrictamente) positiva, tales que

$$(z_1 + z_2 + ... + z_{2020})^2 = z_1^2 + z_2^2 + ... + z_{2020}^2$$

5. (5 puntos) Sea x un número real. Para cada entero positivo n, sea A_n la matriz $n \times n$ tal que $a_{i,i} = x$, $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$ y $a_{i,j} = 0$ si $|i - j| > 1$. Probar que si el determinante de A_n es positivo para todo entero positivo n, entonces $x \geq 2$.

6. (6 puntos) Sea p un número primo y V un espacio vectorial n-dimensional sobre un cuerpo F de caracteristica p. Determinar el mayor entero a_n, tal que para cualquier transformación lineal $T : V \to V$ con $T^p = I$, se tiene que

$$\dim(\{v \in V : Tv = v\} \geq a_n.$$

7. (7 puntos) Encontrar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que

$$f^2(z) - f^2(w) = f(z+w)f(z-w),$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(*Observación:* La notación f^2 indica el cuadrado de la función f, es decir, $f^2(z) = (f(z))^2$).