XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2020

1. (4 puntos) Para todo entero positivo n, se define a_n como el promedio de todos los divisores positivos de n. Determinar si las siguientes series convergen o divergen:

   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, a_n}$

   Solución Se tiene $a_1 = 1$ y supongamos que $n > 1$. Sean $d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ los divisores positivos de n. Se tiene que $d_i < n$ para $i < k$, por tanto

$$a_n < \frac{nk}{k} = n$$

   Por otro lado, es conocido que

$$d_i d_{k+1-i} = n \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k$$

   Multiplicando todas las igualdades anteriores se tiene que

$$n^k = \prod_{i=1}^{k} (d_i d_{k+1-i}) = \left(\prod_{i=1}^{k} d_i \right) \left(\prod_{i=1}^{k} d_{k+1-i} \right) = \left(\prod_{i=1}^{k} d_i \right)^2$$

$$\implies \quad \prod_{i=1}^{k} d_i = n^{\frac{k}{2}}$$

   La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica implica que

$$a_n = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_k}{k} > \sqrt[k]{d_1 d_2 \ldots d_k} = \sqrt[k]{n^{\frac{k}{2}}} = n^{\frac{1}{2}}$$

   La desigualdad es estricta porque $1 = d_1 \neq d_k = n$. Se concluye que

$$n > a_n > \sqrt{n}$$

   Para $n > 1$ se tiene que

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{n^{1/2}}$$

Como la serie harmónica es divergente, la desigualdad anterior junto con el criterio de comparación implican que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

es divergente. Además se tiene que

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n\, a_n} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

Como la p-serie con $p = 3/2$ es convergente, la desigualdad anterior junto con el criterio de comparación implican que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, a_n}$$

es convergente.

Criterio Cada parte vale 2 puntos, los dos puntos serán otorgados si la parte está completa.

2. (4 puntos) Sean a, b números complejos tales que $|b| > \max\{1, |a|\}$. Probar que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{b^{m+1} - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{b^{m+1} - a}.$$

Solución Usando la condición tenemos que $|b^{m+1} - 1| > |b|^{m+1} - 1 > |b|^{m+1} - |b|^m = |b|^m(|b| - 1)$ y así obtenemos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a|^m}{|b^{m+1} - 1|} \leq \frac{1}{|b| - 1} \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{a}{b} \right|^m < \infty,$$

es decir, la serie del lado izquierdo converge absolutamente. Esto justifica el uso de la serie geométrica de la siguiente forma,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{b^{m+1} - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m b^{-(m+1)}}{1 - b^{-(m+1)}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a^m b^{-(m+1)} b^{-n(m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^m}{b^{(m+1)(n+1)}},$$

y también implica que esta serie doble converge absolutamente. Por lo tanto podemos invertir el orden de las series y obtener que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^m}{b^{(m+1)(n+1)}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{b^{(m+1)(n+1)}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{b^{m(n+1)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - a/b^{(n+1)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{n+1} - a},
\end{aligned}$$

donde usamos nuevamente la serie geométrica y que $|a/b^{n+1}| < 1$. Con esto concluye la prueba.

Criterio

1 punto: mostrar convergencia absoluta, que es necesaria para reordenar.
2 puntos: plantear y mostrar identidades que lleven al resultado.
1 punto: concluir correctamente.

3. (5 puntos) Dos elementos de $\mathbb{Z}^2$ se llaman *vecinos* si están a distancia 1. Los elementos de $\mathbb{Z}^2$ se pintan azul (y una vez pintados permanecen pintados) por turnos de la siguiente manera:

   - En el turno 0, se pinta $(0,0)$.
   - En el turno $n > 0$ se pintan todos aquellos puntos que no han sido pintados, y tienen exactamente un vecino pintado tras el turno $n-1$.

   Determinar todos los elementos de $\mathbb{Z}^2$ que no serán pintados tras una cantidad finita de turnos.

   Solución Para $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, sea $v_2(n)$ la máxima potencia de 2 que divide a n, y $v_2(0) = \infty$. Los puntos que no serán pintados son aquellos puntos $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ distinto de $(0,0)$ tales que

$$v_2(x) = v_2(y).$$

   Sea P_n el conjunto de puntos pintados al turno $2^n - 1$, para $n \geq 0$. Es claro que P_n está contenido en el conjunto

$$T_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| + |y| < 2^n\}$$

   pues en cada turno solo se pintan puntos a distancia 1 de puntos previamente pintados. Más aún, en cada turno, el conjunto de puntos pintados tiene simetría del grupo dihedral D_4, pues si en un turno se pinta el punto (x,y), entonces también se pintan los puntos

$$(\pm x, y), (\pm x, -y), (\pm y, x), (\pm y, -x).$$

   Con esto podemos ver que los puntos

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| = |y| > 0\}$$

   nunca serán pintados, pues en todo momento su cantidad de vecinos pintados es par, usando la simetría D_4 sobre los puntos vecinos a estas diagonales.

   Mostraremos inductivamente el siguiente lema:

   Lema. los puntos en P_n son $(0,0)$ y aquellos $(x,y) \in T_n$ tales que $v_2(x) \neq v_2(y)$, y los puntos en $T_n \setminus P_n$ tienen al menos dos vecinos en P_n. Más aún, para $n > 0$, P_n consiste de $(0,0)$ junto con los puntos

$$P_{n-1} + (\pm 2^{n-1}, 0)$$
$$P_{n-1} + (0, \pm 2^{n-1})$$

   donde $X + (a,b) = \{(x+a, y+b) \mid (x,y) \in X\}$ para $X \subset \mathbb{Z}^2$.

   Demostración. Procedemos por inducción en n. Esto es claro para $n = 0, 1$ y asumimos la hipótesis para todo $k \leq n$. Notemos que si $|x| + |y| = 2^n - 1$ entonces $v_2(x) \neq v_2(y)$ pues x, y tienen distinta paridad. Esto nos dice que todo

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| + |y| = 2^n - 1\} \subset P_n$$

Esto implica que ningún punto (x, y) con $|x| + |y| = 2^n$ distinto a $(\pm 2^n, 0), (0, \pm 2^n)$ puede ser pintado.

Sabemos también que P_n consiste del origen junto con cuatro copias disjuntas de P_{n-1} trasladado 2^{n-1} en alguna de las direcciones arriba, abajo, derecha o izquierda. Esto nos dice, que contiguo a los puntos $(\pm 2^n, 0), (0, \pm 2^n)$ se pintarán tres copias de P_{n-1}, haciendo que P_{n+1} consista del origen junto con cuatro copias distjuntas de cuatro copias disjuntas de P_{n-1} junto con uno de los puntos $(\pm 2^n, 0), (0, \pm 2^n)$. Por hipótesis de inducción, estos cuatro componentes disjuntos de P_{n+1} son precisamente tralados de P_n por 2^n.

Como todos los puntos $(x, y) \in T_n$ que no están pintados tienen al menos dos vecinos en P_n, la descripción de P_{n+1} como el origin junto con cuatro copias disjuntas de traslados de P_n muestra que todo punto no pintado en T_{n+1} tiene al menos dos vecinos en P_{n+1}, ya que T_{n+1} puede ser cubierto por cuatro traslados disjuntos de T_n que se omiten unicamente las diagonales $\{|x| = |y|\}$, y más aún, cada traslado de T_n contienen un traslados de P_n dentro de P_{n+1}.

Finalmente, dada nuestra descripción de P_{n+1} por traslados de P_n, tenemos que si $(x, y) \in P_{n+1}$ distinto del origen o los puntos $(\pm 2^n, 0), (0, \pm 2^n)$, entonces alguno de los puntos

$$(x \pm 2^n, y), (x, y \pm 2^n)$$

se encuentra en $P_n \subset T_n$. Esto implica que

$$v_2(x) = v_2(x \pm 2^n) \quad v_2(y) = v_2(y \pm 2^n)$$

y por lo tanto $v_2(x) \neq v_2(y)$. Más aún si un punto $(x, y) \in T_{n+1}$ cumple que $v_2(x) \neq v_2(y)$ entonces o bien está contenido en T_n (y por lo tanto en P_n por hipótesis de inducción), o alguno de los puntos

$$(x \pm 2^n, y), (x, y \pm 2^n)$$

está contenido en T_n, y por hipótesis de inducción, este traslado de (x, y) está en P_n, y por lo tanto (x, y) está en P_{n+1}.

Hemos conluido la demostración del lema. $\square$

Para conluir el problema, notemos que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} T_n = \mathbb{Z}^2$$

y el conjunto de puntos que son pintados tras una cantidad finita de turnos es

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n = P.$$

Si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ cumple que $v_2(x) \neq v_2(y)$, entonces $(x, y) \in T_n$ para algún n y por lo tanto $(x, y) \in P_n \subset P$.

Si $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{Z}^2$ cumple que $v_2(x) = v_2(y)$ entonces $(x,y) \in T_n$ para algún n, y por lo tanto $(x,y) \in T_n \setminus P_n$, de donde (x,y) tiene al menos dos vecinos en P_n, y por lo tanto $(x,y) \notin P_n$ para todo n, de donde $(x,y) \notin P$.

Criterio
El problema pregunta lo siguiente: Si R_n es el conjunto de puntos pintados después de n turnos, que obviamente están en el rectángulo $[-n,n]x[-n,n]$, determinar el conjunto de puntos de $\mathbb{Z}^2$ que no pueden estar en $\cup_{n=1}^{\infty} R_n$.
1 punto: notar que es necesario utilizar potencias de 2 en los pasos requeridos.
1 punto: observar la simetría del resultado por el grupo D_4.
2 puntos: describir P_n como en el enunciado del lema.
1 punto: concluir correctamente.

4. (5 puntos) Determinar si existen números complejos $z_1, z_2, ..., z_{2020}$, todos con parte imaginaria (estrictamente) positiva, tales que

$$(z_1 + z_2 + ... + z_{2020})^2 = z_1^2 + z_2^2 + ... + z_{2020}^2$$

Solución

Vamos a utilizar el hecho que, si $p(z)$ es un polinomio complejo, entonces las raíces de $p'(z)$ pertenecen al cierre convexo de las raices de $p(z)$. Utilizando este hecho reiteradamente, se obtiene que lo mismo se cumple para cualquier derivada $p^{(k)}(z)$. La ecuación del enunciado equivale a decir que $\sum_{i \neq j} z_i z_j = 0$. Por tanto, si $p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_{2020})$, entonces 0 es una raiz de $p^{(2018)}(z)$, lo cual es absurdo si todos los z_i están en el interior del semi-plano superior.

Para probar el hecho inicial es suficiente observar que todo semi-plano que contenga todas las raíces de $p(z)$ debe contener todas las raíces de $p'(z)$. Componiendo el polinomio con una transformación lineal compleja conveniente $T(z) = Az + B$, podemos suponer que el semiplano es $Re(z) \leq 0$. Como $p'(z)/p(z) = \sum 1/(z - z_i)$, si una raíz w de $p'(z)$ está fuera del semiplano $Re(z) \leq 0$, tendremos $Re(w - z_i) > 0$ para todo i, luego $Re(1/(w - z_i)) > 0, \forall i$, de donde $0 = Re(p'(w)/p(w)) = Re(\sum 1/(w - z_i)) > 0$, absurdo.

Criterio
2 puntos: Verfiicar que la envolvente convexa de $p(z)$ contiene las raíces de $p'(z)$.
3 puntos: Concluir correctamente usando ese resultado.

5. (5 puntos) Sea x un número real. Para cada entero positivo n, sea A_n la matriz $n \times n$ tal que $a_{i,i} = x$, $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$ y $a_{i,j} = 0$ si $|i - j| > 1$. Probar que si el determinante de A_n es positivo para todo entero positivo n, entonces $x \geq 2$.

Solución Sea d_n el determinante de A_n para cada entero positivo n. Desarollando el determinante por la primera columna obtenemos $d_{n+1} = x d_n - d_{n-1}$ para todo entero positivo n (convencionamos $d_0 = 1$ para que esto valga también para $n = 1$).

Tenemos $d_1 = x$. Si $d_1 > 0$ entonces $x > 0$. La recursión lineal para d_n nos da una fórmula del tipo $d_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n$ para todo $n \geq 0$, donde α y β son las raices de la ecuación en

$Y^2 - xY + 1 = 0$. Si $0 < x < 2$, podemos escribir $x = 2\cos(\theta)$, para un cierto $\theta \in (0, \pi/2)$, y las soluciones de la ecuación van a ser $\alpha = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$ y $\beta = e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\text{sen}(\theta)$, y luego $\alpha^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)$ y $\beta^n = e^{-in\theta} = \cos(n\theta) - i\text{sen}(n\theta)$. Así, $d_n = b_1 cos(n\theta) + b_2\text{sen}(n\theta)$ para ciertas constantes b_1, b_2. Como $d_0 = 1$ y $d_1 = x = 2\cos(\theta)$, debemos tener $b_1 = 1$ y $b_2 = \cos(\theta)/\text{sen}(\theta)$, luego

$$d_n = b_1 cos(n\theta) + b_2\text{sen}(n\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)\cos(n\theta) + \cos(\theta)\text{sen}(n\theta)}{\text{sen}(\theta)} = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}(\theta)}.$$

Como $\theta \in (0, \pi/2)$, existe un entero positivo n tal que $\pi < (n+1)\theta < 2\pi$, para el cual $d_n = \text{sen}((n+1)\theta)/\text{sen}(\theta) < 0$, lo que contradice la hipótesis $d_n > 0, \forall n$.

Criterio

1 punto: describir inductivamente $det(A_n)$.

1 punto: describir los determinantes d_n en términos de x.

1punto: encontrar la condición que hace $x > 2$.

2 puntos: concluir correctamente.

6. (6 puntos) Sea p un número primo y V un espacio vectorial n-dimensional sobre un cuerpo F de caracteristica p. Determinar el mayor entero a_n, tal que para cualquier transformación lineal $T : V \to V$ con $T^p = I$, se tiene que

$$\dim(\{v \in V : Tv = v\} \geq a_n.$$

Solución Vamos a probar que $a_n = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$.

Note que para toda transformación lineal T, se tiene que $T^p = I \Leftrightarrow (T - I)^p = 0$, más aún

$$\dim(\{v \in V : Tv = v\}) = \dim(\{v \in V : (T - I)v = 0\} = \dim(\ker(T - I)).$$

Suponga que $n = pk + r$, donde k, r son enteros tales que $0 \leq r < p$.

Para demostrar la cota superior sobre a_n. Consideremos la transformación R representada por la matriz con k bloques $A_1, \ldots, A_k$ de tamanos p y un bloque A_{k+1} de tamano r, donde cada bloque es una matriz de Jordan con 1's en la diagonal.

Se verifica que $(T - I)^p = 0$, pues cada bloque de la matriz es un bloque de Jordan asociado a 0 y con tamano a lo sumo p. Y como cada bloque contribuye en uno a la nulidad tenemos que $\dim(\ker(T - I)) = k + 1$ si $r > 0$ o $\dim(\ker(T - I)) = k$ si $r = 0$, en ambos casos

$$\dim(\ker(T - I)) = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil,$$

concluimos entonces que $\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \dim(\ker(T - I)) \geq a_n$.

Para mostrar la cota inferior, sea $T : V \to V$ una transformación lineal cualquiera con $T^p = I$, y sea $S = T - I$, como T es arbitrario, para concluir la cota superior de a_n basta mostrar que $\dim(\ker(S)) \geq \frac{n}{p}$. Tenemos que, para cada $i \geq 0$, $\ker S^{i+1} = \ker S^i + \ker S|_{S^i V}$. Por lo tanto

$$\dim(\ker S^{i+1}) = \dim(\ker S^i) + \dim(\ker S|_{S^i V}) \leq \dim(\ker S^i) + \dim(\ker S).$$

Como $\ker(S^p) = V$, se cumple que $n = \dim V = \dim(\ker S^p) \leq p(\dim(\ker(S)))$.

Criterio
1 punto (si no lo resuelve) por conjeturar correctamente la respuesta.
3 puntos: por encontrar la cota superior.
3 puntos: por encontrar la cota inferior.

7. (7 puntos) Encontrar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que

$$f^2(z) - f^2(w) = f(z+w)f(z-w),$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(*Observación:* La notación f^2 indica el cuadrado de la función f, es decir, $f^2(z) = (f(z))^2$).

Solución Notamos que la función $f \equiv 0$ es una solución. En adelante vamos a suponer que la función es no nula. Empezamos reescribiendo la ecuación funcional como

$$f^2\left(\frac{z+w}{2}\right) - f^2\left(\frac{z-w}{2}\right) = f(z)f(w),$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$. Como las funciones holomorfas son analíticas, podemos escribir $f(z) = \sum a_n z^n$, de manera que

$$f^2\left(\frac{z+w}{2}\right) - f^2\left(\frac{z-w}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\sum_{m+n=k} a_m a_n\right)((z+w)^k - (z-w)^k),$$

$$f(z)f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} a_m a_n z^m w^n.$$

Dado que esto debe valer para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$, para todo $k \geq 0$ debemos tener la igualdad grado por grado; es decir, para todo $k \geq 0$ se cumple que

$$\frac{1}{2^k}\left(\sum_{m+n=k} a_m a_n\right)((z+w)^k - (z-w)^k) = \sum_{m+n=k} a_m a_n z^m w^n.$$

Por el teorema del binomio, el coeficiente de $z^m w^n$ del lado izquierdo es igual a

$$\frac{1}{2^k}\left(\sum_{m+n=k} a_m a_n\right)\frac{k!}{m!n!}(1 - (-1)^n).$$

Por lo tanto la ecuación funcional es equivalente a las relaciones

$$\frac{1}{2^k}\left(\sum_{m+n=k} a_m a_n\right)\frac{k!}{m!n!}(1 - (-1)^n) = a_m a_n, \tag{1}$$

para cualesquiera $m, n \geq 0$ tales que $m + n = k$. Esto implica que si n es par, entonces $a_m a_n = 0$ para todo $m \geq 0$. Dado que estamos suponiendo que $f \neq 0$, entonces existe algún coeficiente $a_m \neq 0$ y por lo tanto $a_n = 0$ para todo n par. Esto implica que (1) se cumple trivialmente cuando k es impar, pues ambos lados son iguales a 0.

Por lo tanto, en lo que resta solo vamos a considerar el caso $k = 2K$ y m, n impares. Multiplicando (1) por $m!n!$ obtenemos que

$$(m!a_m)(n!a_n) = \frac{(1-(-1)^n)k!}{2^k} \sum_{m+n=k} a_m a_n = \frac{k!}{2^{k-1}} \sum_{j=1}^{K} a_{2j-1} a_{2K-2j+1},$$

donde usamos el hecho que los coeficientes pares se anulan. Esto implica que $(m!a_m)(n!a_n) = C_k$ para alguna constante C_k y cualquier par de enteros tales que $m+n = k$. Ahora verificamos que esta condición es suficiente para que se cumpla (1)

$$\sum_{j=1}^{K} a_{2j-1} a_{k-2j+1} = \sum_{j=1}^{K} \frac{C_k}{(2j-1)!(k-2j+1)!} = \frac{C_k}{k!} \sum_{j=1}^{K} \binom{k}{2j-1} = \frac{C^k 2^{k-1}}{k!} = \frac{2^{k-1}}{k!}(m!a_m)(n!a_n),$$

donde usamos el hecho conocido que los k-ésimos coeficientes binomiales impares (y pares) suman 2^{k-1}. Si $b_m := m!a_m$ entonces tenemos las relaciones

$$C_6 = b_1 b_5 = b_3^2, \quad C_8 = b_1 b_7 = b_3 b_5, \quad C_{10} = b_1 b_9 = b_3 b_7 = b_5^2, \quad \ldots.$$

Si $b_1 = a_1 = 0$, entonces es fácil ver que esto implica que $a_m = b_m/m! = 0$ para todo m impar, lo cual no es posible ya que estamos suponiendo que $f \neq 0$. Por lo tanto, $b_1 \neq 0$, y así es fácil demostrar por inducción que todas las relaciones anteriores se satisfacen si y sólo si $b_{2m+1} = b_3^m / b_1^{m-1}$ para todo $m \geq 0$. Por lo tanto, para todo $m \geq 0$ tenemos que

$$a_{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)!} b_{2m+1} = \frac{b_1}{(2m+1)!} \left(\frac{b_3}{b_1}\right)^m.$$

Ahora estudiamos el radio de convergencia de una serie definida de esta manera; tenemos que

$$\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup |a_{2m+1}|^{1/(2m+1)} = \left(\frac{b_3}{b_1}\right)^{1/2} \limsup((2m+1)!)^{-1/(2m+1)} = 0,$$

por lo que cualquier serie de potencias con estos coeficientes define una función entera. Finalmente distinguimos dos casos: $b_3 = 0$ y $b_3 \neq 0$. Si $b_3 = 0$, entonces $a_{2m+1} = 0$ para todo $m \geq 1$ y por lo tanto obtenemos la función $f(z) = a_1 z$, la cual es una solución válida. Si $b_3 \neq 0$, entonces obtenemos

$$f(z) = b_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left(\frac{b_3}{b_1}\right)^m z^{2m+1} = A(e^{Bz} - e^{-Bz}),$$

donde $A, B \in \mathbb{C}$ son tales que $B^2 = b_3/b_1$ y $2AB = b_1$. Es fácil verificar que cualquier función de este tipo cumple las condiciones del problema. Por lo tanto, las soluciones al problema son $f(z) \equiv 0$, $f(z) = Az$ y $f(z) = A(e^{Bz} - e^{-Bz})$ con $A, B \in \mathbb{C}$.

Criterio
2 punto: por el cambio de variable a $(z+w)/2$ y $(z-w)/2$ y plantear los desarrollos en series de potencias.
2 puntos: llegar a la equivalencia de la ecuación funcional con las ecuación (1).
1 punto: verificar que $a_n = 0$ si n es par.
2 puntos: concluir estableciendo las soluciones de forma explícita.